

Задача 1

В-1 Аля и Валя испекли пирог прямоугольной формы со сторонами 20 и 15 см и решили сыграть в такую игру. Каждая из них по очереди делает не более двух параллельных разрезов и съедает один из имеющихся кусков. При этом куски перекладывать нельзя. За один ход обязательно нужно съесть кусок, но не более $1/10$ пирога. Запрещено резать пирог так, чтобы получались куски меньше $1/100$ пирога. Побеждает тот, кто доел пирог. Кто выигрывает при правильной игре, если начинает Аля? Какая стратегия выигрышная?

Ответ: Аля.

Решение. Оптимальная стратегия такова. Аля первым ходом вырезает и съедает из пирога полосу так, чтобы остались два симметричных прямоугольника. Далее, какой бы кусок ни съела Валя — это будет кусок от одной из частей. Аля съедает центрально симметричный кусок от другой части, и тем самым обеспечивает себе победу.

Задача 2

В-1 Решите уравнение

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13.$$

Ответ: $x = 3, -1 - \sqrt{6}, 1$

Решение. Два случая. Первый, когда выражение под модулем неотрицательно, получаем уравнение

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1 \pm \sqrt{6}$$

В рассматриваемую область попадают $x = 3, x = -1 - \sqrt{6}$

Второй случай, когда выражение под модулем отрицательно, получаем уравнение

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \pm \sqrt{12}$$

В рассматриваемую область попадает $x = 1$.

Ответ равен $x = 3, -1 - \sqrt{6}, 1$.

Задача 3

В-1 Из бумаги вырезали два разных прямоугольника — но у каждого длины сторон выражаются натуральными числами, и у каждого периметр численно равен его площади. Оба прямоугольника положили на стол, один на другой, так, что некоторые стороны одного прямоугольника оказались параллельны некоторым сторонам другого — и какая-то часть столешницы оказалась накрыта всего одним слоем бумаги.

Какая наименьшая возможная площадь этой части столешницы?

Ответ: 10

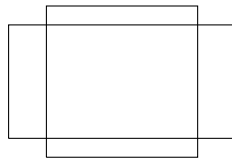
Решение. Сначала найдём размеры возможных прямоугольников. Пусть стороны равны x и y . Тогда

$$xy = 2x + 2y,$$

$$x(y - 2) = 2y,$$

$$x = \frac{2y}{y - 2} = 2 \left(\frac{y - 2 + 2}{y - 2} \right) = 2 \left(1 + \frac{2}{y - 2} \right).$$

Видим, что $y = 1$ приводит к противоречию (отрицательное x), как и $y = 2$ (тогда одновременно $y = 0$). Начиная с $y = 3$ выражение $\frac{2}{y-2}$ при росте y будет убывать. Значит, потенциально x не может быть больше 6. Перебрав варианты $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, получаем варианты $x = 6, y = 3$; $x = 4, y = 4$; $x = 3, y = 6$. То есть таких прямоугольников всего два: 4 на 4, и 6 на 3.



Предложим такое расположение прямоугольников. Оно действительно оптимально — небольшие сдвиги вверх-вниз не изменят площади пересечения, большие (когда нижняя или верхняя сторона квадрата окажутся внутри прямоугольника) её уменьшат, что увеличит площадь однослойной области. Аналогично работают сдвиги влево и вправо.

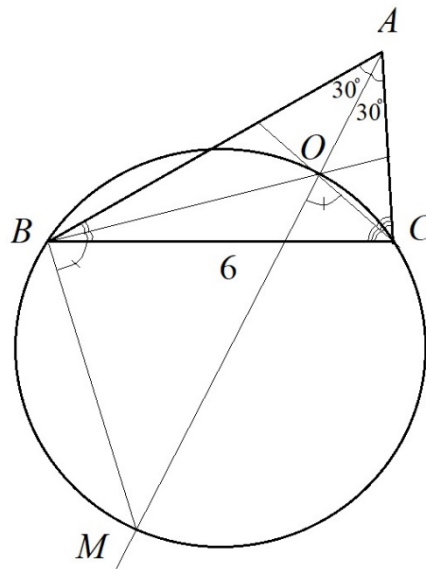
Остаётся посчитать площадь, и она равна $3 \cdot \frac{6-4}{2} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{4-3}{2} \cdot 2 = 10$

Задача 4

В-1 Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Прямая AO пересекает описанную окружность треугольника OBC в точках O и M . Найдите длину секущей OM , если $BC = 6$, $AB : AC = 3 : 1$, и $\angle BAC = 60^\circ$.

Ответ: $4\sqrt{3}$

Решение.



Так как $\angle OBM = \frac{\angle ABC}{2} + \angle CBM = \frac{\angle ABC}{2} + \angle COM = \frac{\angle ABC}{2} + \angle OAC + \angle OCA = \frac{\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB}{2} = 90^\circ$, то $OM = 2R$ (где R — радиус описанной около треугольника OBC окружности).

Также $\angle BOC = 180^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} = 120^\circ$.

Поэтому $OM = 2R = \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

Задача 5

В-1 Найдите все значения a , при каждом из которых оси координат и гипербола $y = 1/x$ высекают на прямой $y = -18x + a$ три отрезка равной длины.

Ответ: ± 9

Решение. Достаточно рассмотреть случай $a > 0$, так как в силу симметрии любое противоположное значение a также удовлетворяет условию задачи. Прямая $y = -18x + a$ пересекает оси координат в точках $A(0, a)$ и $B(\frac{a}{18}, 0)$, а гиперболу $y = 1/x$ — в точках $C(x_1, \frac{1}{x_1})$ и $D(x_2, \frac{1}{x_2})$, где x_1, x_2 — корни уравнения $\frac{1}{x} = -18x + a$, $0 < x_1 < x_2$ (случай, когда уравнение имеет меньше двух корней, очевидно, не подходит). Это уравнение равносильно квадратному уравнению $18x^2 - ax + 1 = 0$. По условию $AC = CD = DB$, поэтому $x_1 = x_2 - x_1 = \frac{a}{18} - x_2$. Отсюда находим $x_2 = 2x_1$, $a = 18(x_1 + x_2) = 18 \cdot 3x_1$. По теореме Виета $x_1 x_2 = \frac{1}{18}$, откуда $2x_1^2 = \frac{1}{18}$, тогда $x_1 = \frac{1}{6}$, $a = 18 \cdot 3x_1 = 9$. Конечно, ещё нужно проверить, что уравнение $18x^2 - ax + 1 = 0$ имело корни, и $D = 9^2 - 4 \cdot 18 = 9$ это показывает. Ответ ± 9 .

Задача 6

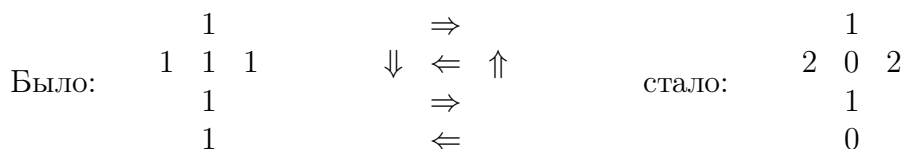
В-1 На каждой стороне белого кубика сидит по жуку. Кубик бросили, и жуки переполошились — каждый выбрал наугад одну из 4-х соседних граней и переполз туда.

С какой вероятностью кубик не изменит своего первоначального вида?

Ответ: $\frac{5}{256}$

Решение. Если нарисовать на гранях кубика стрелки, направленные в сторону, куда пополз жук — мы тем самым опишем исход броска. Всего таких исходов будет $4^6 = 4096$ (6 граней, на каждой по 4 варианта), и они равновероятны.

Нарисуем пример на развёртке:



Какие исходы приведут нас к такому же кубику? На каждую грань должно вползть по одному жуку, то есть на каждую грань должна быть направлена ровно одна стрелка. Значит, если начать двигаться против направления стрелок — дорогу мы найдём однозначно, «развилка» не будет, и в конце концов (так как граней на кубике конечное число) мы будем вынуждены вернуться на грань, с которой начали. Это верно для любой грани. Иными словами, рисунок из стрелок образует на сторонах кубика цикл, или несколько циклов.

Граней 6, поэтому длины циклов потенциально могут быть от 2 до 6. Циклы в 2, 3, 4 и 6 жуков нарисовать получится, а вот попытка нарисовать цикл длиной 5 приведёт к неподвижному жуку, что невозможно. Значит, правильный исход может состоять из таких циклов: 2, 2, 2; 2, 4; 3, 3; 6.

Посчитаем количество возможных рисунков с такими свойствами.

2, 2, 2 (то есть жуки попарно меняются местами). Жук с верхней грани меняется местами с одной из 4 боковых, а жуку с нижней остаётся всего 2 на выбор (он не может ползти на грань, противоположную выбранной верхним жуком.) То есть таких конфигураций $4 \cdot 2 = 8$.

2, 4. Цикл длиной 4 обходит вокруг ребра куба — по или против часовой стрелки. Оставшиеся два жука меняются местами. Значит, число таких конфигураций равно числу способов выбрать ребро (рёбер 12) умножить на 2 (по или против часовой). Значит, $12 \cdot 2 = 24$.

3, 3. Цикл длиной 3 обходит вокруг вершины, по или против часовой. Оставшиеся 3 жука ползут так же. Верхняя грань участвует в одном из циклов, значит мы можем выбрать для неё 4 соседние вершины, 2 ориентации, и ещё есть 2 ориентации для оставшихся жуков. Будет $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ рисунков.

6. Обойдём куб по направлению стрелок. С верхней грани мы можем перейти на одну из 4 боковых. Дальше мы можем повернуть налево, направо, или спуститься на нижнюю грань. Варианты «налево» и «направо» могут продолжиться двумя способами — либо мы идём в ту же сторону, либо спускаемся вниз. Если мы шли в ту же сторону — дальше путь продолжается однозначно (через нижнюю грань), если спускались — вариантов дорисовывания 2.

Вариант «на втором шаге мы спустились вниз» дорисовывается до полного цикла двумя способами.

Всего циклов длиной 6 будет $4(2(1 + 2) + 2) = 32$.

А вероятность равна

$$\frac{32 + 16 + 24 + 8}{4096} = \frac{80}{4096} = \frac{5}{256} \quad (\text{приблизительно } 2\%).$$

Задача 7

В-1 В классе, состоящем из 20 учащихся, учитель раздал каждому свой сборник, содержащий ровно 100 задач. Каждый учащийся решил из этого сборника не менее n задач, а Петя — больше, чем Вася. Для какого наименьшего значения n при этом условии обязательно найдется задача, которую решило не менее половины класса?

Ответ: 45

Решение. Если $n \geq 45$, то в общей сложности учащиеся решили задач не менее $19 \cdot 45 + 46 = 901$. Но если при этом каждую задачу решило не более 9 учащихся, то всего задач они решили не более $9 \cdot 100 = 900 < 901$ — противоречие. Если же $n \leq 44$, причём Петя решил 45 задач, а все остальные по 44 задачи — пусть даже все по 45, то может случиться, что каждую задачу решили ровно по 9 учащихся. Действительно, расположив все 100 задач по окружности, каждому учащемуся отведем ровно по 45 задач подряд со сдвигом на 5 задач при переходе к следующему учащемуся — тогда каждой задаче будет соответствовать ровно 9 учащихся.

Задача 8

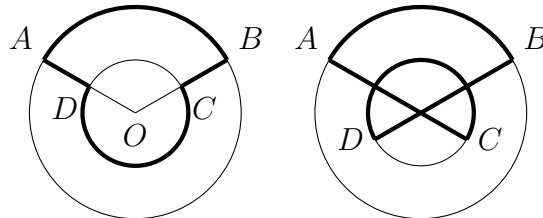
В-1 Вася нарисовал на доске замкнутую кривую $ABCD$, состоящую из четырех звеньев: AB — дуга окружности, меньшая полуокружности, BC — отрезок, CD — дуга окружности, большая полуокружности, DA — отрезок, таким образом, что любые два соседних звена перпендикулярны друг другу. Петя нарисовал кривую данного вида так, чтобы длины всех звеньев совпадали. Какие тогда будут углы у дуг AB и DC ?

Примечание: прямая перпендикулярна дуге окружности, если прямая перпендикулярна касательной к окружности.

Ответ: $\alpha_1 = 2\pi \left(\frac{2\sqrt{\pi^2+1}-2\pi}{2+2\sqrt{\pi^2+1}-2\pi} \right)$ и $2\pi - \alpha_1$, или $\alpha_2 = \pi - \sqrt{\pi^2 - 2\pi}$ и $2\pi - \alpha_2$.

Решение. Так как BC перпендикулярно дуге $\cup AB$, то радиус окружности, на которой лежит дуга, лежит на прямой BC . Аналогично, на прямой BC лежит радиус окружности, содержащей дугу $\cup CD$ — и одновременно радиусы обеих окружностей лежат на прямой DA . Из-за того, что дуги не равны полуокружностям по условию, прямые BC и DA пересекаются — и вместе всё это значит, что окружности имеют общий центр.

Также есть требование, что одна дуга больше полуокружности, а другая — меньше. С учётом того, что мы хотим получить равные длины всех звеньев ломаной, большая полуокружность должна быть у окружности меньшего радиуса, что оставляет нас с двумя вариантами ломаной:



Пусть $|\cup AB| = BC = |\cup CD| = DA = a$. Пусть радиус $\cup CD$ меньше. Обозначим O — центр окружности, содержащей дугу $\cup CD$, r — ее радиус, α — угол AOB .

В первом случае — с одной стороны, $\alpha = \frac{|\cup AB|}{r+a} = \frac{a}{r+a}$. С другой стороны $\alpha = \frac{2\pi r - |\cup CD|}{r} = \frac{2\pi r - a}{r}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{a}{r+a} &= \frac{2\pi r - a}{r} \\ ra &= (2\pi r - a)(r+a) \\ ra &= 2\pi r^2 + 2\pi ra - ar - a^2 \\ 2\pi r^2 + (2\pi - 2)ar - a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Будем решать это уравнение как квадратное относительно r . Имеем $D = (2\pi - 2)^2 a^2 + 8\pi a^2 = 4a^2(\pi^2 + 1)$. Отсюда

$$r = \frac{-(2\pi - 2)a \pm 2a\sqrt{\pi^2 + 1}}{4\pi}.$$

Один корень отрицательный, а вот второй больше нуля (т.к. $\sqrt{\pi^2 + 1} > \pi$).

То есть

$$\alpha = 2\pi - \frac{a}{r} = 2\pi - \frac{4\pi}{2 + 2\sqrt{\pi^2 + 1} - 2\pi} = 2\pi \left(\frac{2\sqrt{\pi^2 + 1} - 2\pi}{2 + 2\sqrt{\pi^2 + 1} - 2\pi} \right) \approx 0.844684 \text{ радиан.}$$

У второй дуги угол равен $2\pi - \alpha$.

Рассмотрим второй случай (когда кривая самопересекающаяся). R - радиус большей окружности, r - меньшей. $\alpha = \angle AOB \in (0, 180)$.

Тогда, дуга $AB = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$. А дуга $CD = \frac{\pi r}{180}(360 - \alpha)$. $|AC| = |BD| = R + r$.

Тогда получим следующую систему:

$$R + r = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \frac{\pi r}{180}(360 - \alpha).$$

Тогда имеем

$$R\alpha = R \left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha - 1 \right) (360 - \alpha).$$

Получим следующее квадратное уравнение

$$\frac{\pi}{360}\alpha^2 - \pi\alpha + 180 = 0,$$

где положительный дискриминант равен $D = \pi^2 - 2\pi$. Тогда имеем два решения

$$\alpha_{\pm} = \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 2\pi}}{2\pi} \cdot 360.$$

Очевидно, что $\alpha_+ > 180$, а $\alpha_- \in (0, 180)$. Тогда получим второй вариант угла

$$\alpha_2 = \pi - \sqrt{\pi^2 - 2\pi} \text{ рад.}$$
